Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Mardi 8 novembre 2022 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[55 points]**.

8822 – 7118

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 28]

Dans cette question, vous explorerez des séries de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} i^q = 1^q + 2^q + 3^q + \ldots + n^q \text{, **où** } n, q \in \mathbb{Z}^+$$

et vous utiliserez diverses méthodes pour trouver des polynômes, en fonction de n, pour ces séries.

Lorsque $q = 1$, la série ci-dessus est arithmétique.

(a) Montrez que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$. [1]

Considérez le cas lorsque $q = 2$.

(b) Le tableau suivant donne les valeurs de n^2 et $\sum_{i=1}^{n} i^2$ pour $n = 1, 2, 3$.

n	n^2	$\sum_{i=1}^{n} i^2$
1	1	1
2	4	5
3	9	p

(i) Écrivez la valeur de p. [1]

(ii) La somme des n premiers nombres carrés peut être exprimée comme un polynôme cubique comportant trois termes :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \text{, où } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}^+.$$

À partir de là, écrivez un système de trois équations du premier degré en fonction de a_1, a_2 et a_3. [3]

(iii) À partir de là, trouvez les valeurs de a_1, a_2 et a_3. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Vous considérerez maintenant une méthode pouvant être généralisée à toutes les valeurs de q.

Considérez la fonction $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Montrez que $x f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$. [1]

Soit $f_1(x) = x f'(x)$. Considérez la famille de fonctions suivante :

$$f_2(x) = x f_1'(x)$$

$$f_3(x) = x f_2'(x)$$

$$f_4(x) = x f_3'(x)$$

$$\ldots$$

$$f_q(x) = x f_{q-1}'(x)$$

(d) (i) Montrez que $f_2\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^i$. [2]

(ii) Prouvez par récurrence que $f_q\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} i^q x^i$, $q \in \mathbb{Z}^+$. [6]

(iii) En utilisant la notation sigma, écrivez une expression pour $f_q(1)$. [1]

(e) En considérant $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ comme une série géométrique, pour $x \neq 1$, montrez que $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. [2]

(f) Pour $x \neq 1$, montrez que $f_1(x) = \frac{nx^{n+2} - \left(n+1\right)x^{n+1} + x}{\left(x-1\right)^2}$. [3]

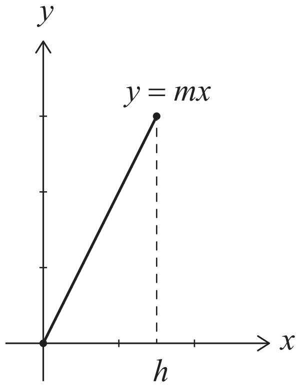
(g) (i) Montrez que $\lim_{x \to 1} f_1(x)$ est une forme indéterminée. [1]

(ii) À partir de là, en appliquant la règle de L'Hôpital, montrez que $\lim_{x \to 1} f_1(x) = \frac{1}{2}n\left(n+1\right)$. [5]

2. [Note maximale : 27]

Dans cette question, vous explorerez l'aire de surfaces incurvées et vous utiliserez l'analyse mathématique pour déduire des formules clés utilisées en géométrie.

Considérez la droite $y = mx$ à partir de l'origine, où $0 \le x \le h$ et m, h sont des constantes positives.



Lorsque cette droite subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des abscisses, un cône est formé dont l'aire A de sa surface incurvée est donnée par :

$$A = 2\pi\int_0^h y\sqrt{1+m^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Étant donné que $m = 2$ et $h = 3$, montrez que $A = 18\sqrt{5}\,\pi$. [2]

(b) Considérez maintenant le cas général où un cône est formé lorsque la droite $y = mx$, où $0 \le x \le h$, subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des abscisses.

(i) Déduisez une expression pour le rayon r de ce cône en fonction de h et m. [1]

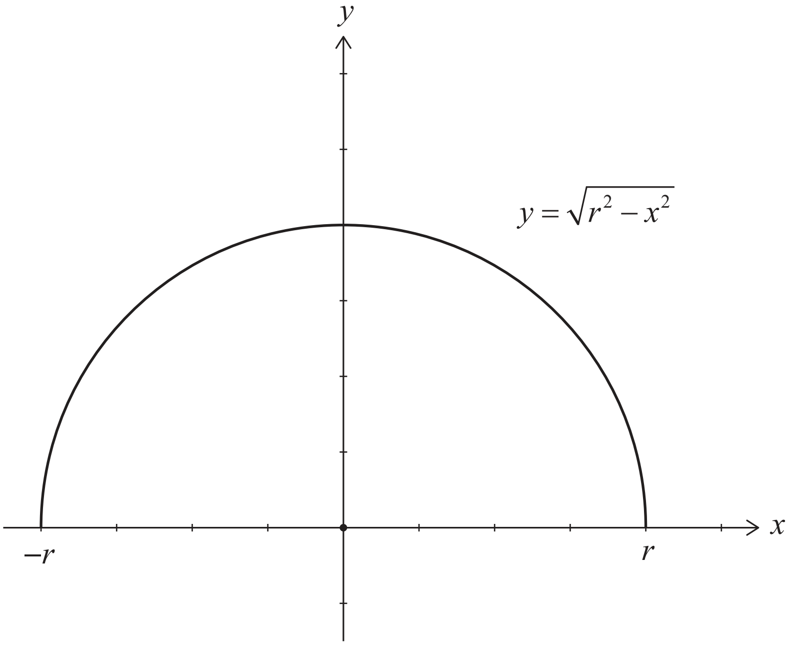
(ii) Déduisez une expression pour l'apothème (la génératrice ou la hauteur oblique) l en fonction de h et m. [2]

(iii) À partir de là, en utilisant l'intégrale ci-dessus, montrez que $A = \pi r l$. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Considérez le demi-cercle de rayon r, défini par $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, où $-r \le x \le r$.



(c) Trouvez une expression pour $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. [2]

Une courbe dérivable $y = f(x)$ est définie pour $x_1 \le x \le x_2$ et $y \ge 0$. Lorsqu'une telle courbe subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des abscisses, l'aire A de la surface formée est donnée par :

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

(d) Une sphère est formée lorsque le demi-cercle $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, où $-r \le x \le r$, subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des abscisses. Montrez par intégration que l'aire de la surface de cette sphère est $4\pi r^2$. [4]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(e) Soit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, où $-r \leq x \leq r$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ est transformée en la représentation graphique de $y = f(kx)$, $k > 0$. Ceci forme une courbe différente, appelée une demi-ellipse.

(i) Décrivez cette transformation géométrique. [2]

(ii) Écrivez les abscisses à l'origine de la représentation graphique de $y = f(kx)$ en fonction de r et k. [1]

(iii) Pour $y = f(kx)$, trouvez une expression pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en fonction de x, r et k. [2]

(iv) La demi-ellipse $y = f(kx)$ subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des abscisses pour former un solide appelé un ellipsoïde.

Trouvez une expression en fonction de r et k pour l'aire A de la surface de l'ellipsoïde.

Donnez votre réponse sous la forme $2\pi\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{p(x)}\,\mathrm{d}x$, où $p(x)$ est un polynôme. [4]

(v) La planète Terre peut être modélisée par un ellipsoïde. Dans ce modèle :

- l'ellipsoïde possède un axe de symétrie allant du pôle Nord au pôle Sud.
- la distance entre le pôle Nord et le pôle Sud est de $12\ 714\,\mathrm{km}$.
- le diamètre de l'équateur est de $12\ 756\,\mathrm{km}$.

En choisissant des valeurs appropriées pour r et k, trouvez l'aire de la surface de la Terre en km^2, correcte à 4 chiffres significatifs près. Donnez votre réponse sous la forme $a \times 10^q$, où $1 \leq a < 10$ et $q \in \mathbb{Z}^+$. [4]

Références :